这次学习是把以前落下的东西重新捡起来。

本博文的特点是把上升幂也加入到理论构建的过程中了，并对书中的叙述过程做了些许修改，

也是用上具体数学的字体了，渲染一些符号试试。***爽。***

so I say that's cool.

just, cool.

fantastic.

$ABC + \sum_{h}^{n} i\pi \max \min Df(x) = \lim mx^{m-1}$

$$\begin{cases} 1 \\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ \beta\alpha AB\Gamma\gamma \end{cases}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

顺便一提，数学文章的分割线应当是严肃的黑线！😎😎😎☝🤓☝🤓☝🤓😭😭😭

比起微分算子 $Df(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$，差分算子 $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ 显得有些简洁而清纯。

书里介绍差分算子就是把微分算子中的 h 设为了固定值 1，记忆中书里确实喜欢搞一些对应，或者说——对标？哈哈，确实有些对标的味道。

但注意，就算是差分算子，也不一定非得用来处理整数函数，处理实函数其实也可以的。（虽然接下来的上升幂和下降幂的作用域确实只在整数，但值域是实数的）

书中的“mth power”，或者说上升幂和下降幂，是一种进行不完全的阶乘。

设定 $x^{\overline{0}} = x^{\underline{0}} = 1$ 是个较为合理的选择，乘法单位元嘛（而且 infinite caculus 那边的 x^0 也是 1），对于 $x^{\underline{-k}}$ 和 $x^{\overline{-k}}$ 这两兄弟的设定放在了后面。

书中的小试牛刀给出了 $\Delta(x^{\underline{m}}) = mx^{\underline{m-1}}$ 的结果，而我们对上升幂应用此过程会得出一个类似的结果：

$\Delta(x^{\overline{m}})$

$= (x+1)^{\overline{m}} - x^{\overline{m}}$

$= (x+m)(x+m-1)...(x+2)(x+1) - (x+m-1)(x+m-2)...(x+1)x$

$= m(x+1)^{\overline{m-1}}$

紧接着给出的是对标（奇怪，我为什么要说对标） infinite calculus 中积分算子的 sum 算子，也就是 $\sum g(x)\delta x$，得到的函数族是 $f(x) + C$，无限微积分中的 C 是常数（其实就是唯一被微分算子作用后为零函数的函数种类），而书中说这里可以是任意被差分算子作用后为 $0(x)$ 的函数。

接下来就是传奇的微积分第二基本定理了（离散版）：

若有 $\Delta f(x) = g(x)$ 也即 $f(x) \in \sum g(x)\delta x$，则有：

$\sum_{a}^{b} g(x)\delta x = g(x)|_{a}^{b} = f(b) - f(a)$

这里并没有定义 $\sum_a^b g(x)\delta x$，而是从上面的定理来逐渐归纳出 $\sum_a^b g(x)\delta x$ 的具体形式，挺新颖的。 最终得到了 $\sum_a^b g(x)\delta x = \sum\limits_{a\leqslant i<b} g(i)$（满足 $b \geqslant a$）

类似的运算法则自然也有，比如 $\sum_b^a g(x)\delta x = -\left(\sum_a^b g(x)\delta x\right)$

再比如 $\sum_a^b g(x)\delta x + \sum_b^c g(x)\delta x = \sum_a^c g(x)\delta x$

以上都是一些准备工作，接下来才要深入这个领域的细节，说实话，有很多令人惊叹的结果，特别是上升幂函数和下降幂函数带给我们的，下文首先就要研究它们。

首先，对于下降幂 $x^{\underline{m}}$ 和上升幂 $x^{\overline{m}}$，我们来定义 $m < 0$ 的情境下它们是什么。

如同书中所说的，我们的定义应当是“良定义的”，即在我们的定义下负数的 `m` 也依然能满足我们之前推出来的那些性质，比如 $\Delta(x^{\underline{m}}) = mx^{\underline{m-1}}$ 和 $\Delta\left(x^{\overline{m}}\right) = m(x+1)^{\overline{m-1}}$ 这一组。

当然，书中还提到了一个加法-乘法规则，比如对于普通的幂级数来说 $x^{m+n} = x^m x^n$，

那么对于下降幂来说，很自然地：$x^{\underline{m+n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n}}$

对于上升幂，同样很自然地：$x^{\overline{m+n}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n}}$

所以我们对 `m < 0` 情形下这两种幂的定义需要满足的就是上面的几个规则，这里直接说结论了，$x^{\underline{-k}} = \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant k} \frac{1}{x+i}$，$x^{\overline{-k}} = \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant k} \frac{1}{x-i}$，笔者已经按照书上的过程验证过了，读者也可自行验证。

还记得我们从微积分中推导出的固定幂函数的连续求和公式吗？它表明

$$\int_a^b x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\bigg|_a^b$$

但它对 $m = -1$ 的情形失效，当 $m = -1$ 时 $\int x^{-1}dx$ 是 $\ln(x)$，一个超越函数。

下降幂与上升幂同样有类似于此的离散求和公式，**甚至公式同样在 `m = -1` 时失效，且此处的定求和同样被某种超越函数替换！** （如此美妙的对应关系一定隐藏着某种世界的本质……🤗🤗🤗😝😝😝😞😞😞🥵🥵🥵🧐🧐🧐🤓🤓🤓😋😋😋）

不多废话了，定求和还是很容易看出来的：

$$\Delta\left(\frac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\right) = x^{\underline{m}}$$

$$\Delta\left(\frac{(x-1)^{\overline{m+1}}}{m+1}\right) = x^{\overline{m}}$$

而对于 `m = -1` 时，我们有：

$$\sum x^{\underline{-1}}\delta x = H_x$$

也就是 $\Delta H_x = \frac{1}{x+1}$

又有：

$$\sum x^{\overline{-1}}\delta x = H_{x-2}$$

也就是 $\Delta H_{x-2}=\frac{1}{x-1}$

这里的 $H_x=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{x}$（调和级数）

原书里有这么一句话 `This formula indicates why harmonic numbers tend to pop up in the solutions to discrete problems like the analysis of quicksort, just as so-called natural logarithms arise naturally in the solutions to continuous problems.`

确实挺不错的。

当然这里就自然引出另一个话题，也即指数为变量的幂函数，$f(x)=m^x$，对于连续微积分我们有 $De^x=e^x$ 的一个奇异点（其实对于 Ce^x 也是，C 是常数，可以是 0），那么对于离散微积分呢？还真有，它就是 2^x

这个结果是不是唯一的呢，基本上吧。因为 $f(x+1)-f(x)=f(x)$ 其实也就是 $f(x+1)=2f(x)$，满足这个的函数只有 $C2^x$（C 是常数，可以是 0）。

而且对于更一般的系数 m 也有 $\Delta(\frac{m^x}{m-1})=m^x$（$m\neq 1$）

嗯这里你一定想知道 $m=1$ 的情形。实际上它是 $\Delta x=1^x=1$，嗯，这里与连续微积分得到了一样的结果（$Dx=1$）……实际上总会有一些重合的部分。

> 好吧，到这里已经阶段性结束了，有个书上的话题我还没有说，就是通过普通幂转下降幂的方式，可以实现普通幂的离散求和。（其实也可以转上升幂）这种转换涉及的是几类斯特林数，那就是组合数学的话题了。

接下来是差分算子的运算法则。

加法： 显然有 $\Delta(f(x)+g(x))=f(x+1)+g(x+1)-(f(x)+g(x))=\Delta(f(x))+\Delta(g(x))$

倒数： 有 $\Delta\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{1}{f(x+1)}-\frac{1}{f(x)}=\frac{f(x)-f(x+1)}{f(x)f(x+1)}=\frac{-\Delta(f(x))}{f(x)f(x-1)}$（这个形式跟连续版本很像）

乘法： 有

$\Delta(u(x)v(x))$
$=u(x+1)v(x+1)-u(x)v(x)$
$=u(x+1)v(x+1)-u(x)v(x+1)+u(x)v(x+1)-u(x)v(x)=\Delta(u(x))v(x+1)+\Delta(v(x))u(x)$
$=u(x+1)v(x+1)-u(x+1)v(x)+u(x+1)v(x)-u(x)v(x)=\Delta(v(x))u(x+1)+\Delta(u(x))v(x)$

为了方便表示，定义一个 shift（位移）算子 E，满足 $Ef(x)=f(x+1)$，我们可以重写乘法法则：

$\Delta(uv)=\Delta uEv+u\Delta v=\Delta vEu+v\Delta u$

和连续微积分一样，倒数和乘法法则结合就是除法法则。

那么有没有链式法则呢？$\Delta(f(g(x)))=f(g(x+1))-f(g(x))$，可以进一步化简吗？

答案是并没有普适的链式法则，只有当 f 是线性函数时整个表达式会退化。